

# Ein nichtlineares Reibmodell für die numerische Simulation reibungsbehafteter mechatronischer Systeme

Stephan Klotzbach\* und Hermann Henrichfreise+

*\*DMecS Development of Mechatronic Systems GmbH & Co. KG, Köln, info@dmecs.de, www.dmecs.de*  
*+Cologne Laboratory of Mechatronics (CLM), Fachhochschule Köln, info@clm-online.de, www.clm-online.de*

## Kurzfassung

Dieser Beitrag behandelt die Modellierung und Simulation von Reibung in mechatronischen Systemen. Aufbauend auf aus der Literatur bekannten Ansätzen wird ein mathematisches Modell für Reibung vorgestellt und auf dessen Implementierung in der Entwicklungsumgebung MATLAB/Simulink eingegangen. Dabei liegt ein besonderes Augenmerk auf der Einbeziehung lastabhängiger Reibung sowie auf der genauen numerischen Nachbildung aller Größen in den Zuständen Haften und Gleiten und der Übergänge zwischen diesen Reibungszuständen. Simulationsergebnisse für den Stick-Slip-Effekt und die lastabhängige Reibung zeigen die Funktionalität des Reibmodells. Das Modell kommt in einer Vielzahl von Anwendungen zum Einsatz. Einige Beispiele sind Aktoren für Lenkungen und Brake-by-wire sowie Kupplungen und Reifenmodelle.

## 1 Einleitung

Das Phänomen Reibung gewinnt bei der Entwicklung mechatronischer Systeme zunehmend an Bedeutung. Für regelungstechnische Systeme ist Reibung häufig ein unerwünschtes Phänomen, dessen Auswirkung auf Regelfehler von Antriebssystemen durch geeignete Maßnahmen zu kompensieren ist [1]. Für Kupplungen [2], Bremsen und Reifen ist Reibung dagegen ein erwünschtes Phänomen. In allen Fällen sind für eine Vorhersage der Auswirkungen von Reibung auf das Systemverhalten mit Hilfe der numerischen Simulation zuverlässige Modelle erforderlich. Diese Modelle müssen für die HIL-Simulation z.B. von Antriebssträngen oder Gesamtfahrzeugen zusätzlich echtzeitfähig sein.

Zum Thema Reibung gibt es eine Vielzahl von Veröffentlichungen. Einige grundlegende Arbeiten für die Beschreibung von Reibung aus mechatronischer Sicht sind mit [3] bis [8] gegeben. Die in [3] bis [5] angegebenen Modelle berücksichtigen dabei die in vielen realen Systemen auftretende Lastabhängigkeit der Reibung. Die in Kapitel 2 dargestellte

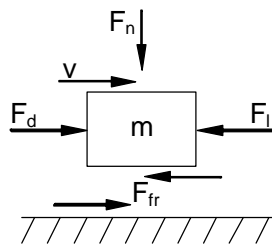
Modellbildung führt die Ansätze aus [4] bis [7] zu einem Modell für die Simulation von Reibung zusammen. Dabei wird ein neuer Ansatz für die Lastabhängigkeit von Reibung vorgestellt.

In Kapitel 3 wird kurz auf die programmtechnische Implementierung in der Entwicklungsumgebung MATLAB/Simulink eingegangen. Hier wird besonderer Wert auf die genaue numerische Nachbildung aller Größen in den Zuständen Haften und Gleiten sowie der Übergänge zwischen diesen Reibungszuständen gelegt. Das Ergebnis ist ein in einem weiten Anwendungsfeld einsetzbares, leicht parametrierbares Modell in Form eines Simulink-Subsystems.

Kapitel 4 belegt mit Simulationsergebnissen die Qualität des Reibmodells. Mit einer Zusammenfassung und Beispielen für den erfolgreichen Einsatz des Modells in Kapitel 5 schließt der Beitrag ab.

## 2 Modellbildung

Das nachfolgend beschriebene Modell für Reibung ist mit Bild 2.1 und den dargestellten Kraft- und Bewegungsgrößen leicht nachvollziehbar.



**Bild 2.1:** *Bewegte Masse mit Reibung*

Die Masse  $m$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zu einer feststehenden Oberfläche. Auf die Masse wirke die antreibende Kraft  $F_d$ , die Lastkraft  $F_l$  sowie eine Normalkraft  $F_n$ . Die resultierende Reibkraft  $F_{fr}$  kann gemäß [4; 5] durch die Fallunterscheidung

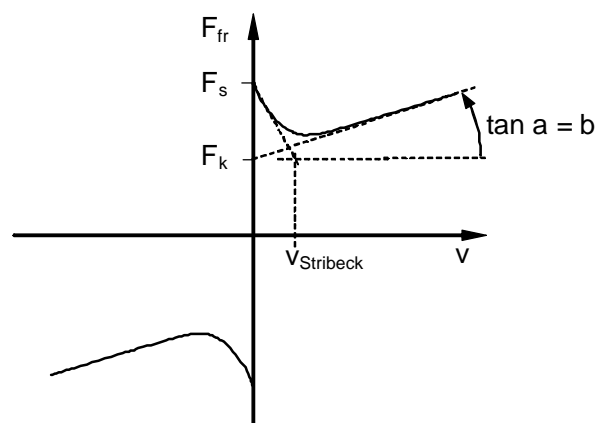
$$F_{fr} = \begin{cases} F_{ext} & v = 0 \wedge |F_{ext}| \leq F_s \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_{ext}) & v = 0 \wedge |F_{ext}| > F_s \\ (F_{\text{Stribeck}}(|v|) + b |v|) \cdot \text{sgn}(v) & v \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

dargestellt werden. Darin beschreibt die erste Zeile die Reibkraft für den Zustand des Haftens. Die Reibkraft befindet sich im statischen Gleichgewicht mit der Summe  $F_{ext} = F_d - F_l$  der äußeren antreibenden und verzögernden Kräfte. Dieser Zustand besteht für  $v = 0$  solange der Betrag der Summe  $F_{ext}$  die Losbrechkraft (statische Reibkraft)  $F_s$  nicht übersteigt. Übersteigt die Summe  $F_{ext}$  die statische Reibkraft, geht die Masse vom Haften in das Gleiten über. In diesem

Zustand des Losbrechens ist die Reibkraft gemäß der zweiten Zeile der Fallunterscheidung vom Betrag gleich der statischen Reibkraft, und ihr Vorzeichen ist durch das Vorzeichen von  $F_{\text{ext}}$  gegeben. Schließlich beschreibt die dritte Zeile in Gleichung (1) die Reibkraft für den Zustand des Gleitens. In diesem Zustand ist die Reibkraft eine Funktion der Geschwindigkeit und ist der Bewegung der Masse entgegengerichtet. Sie setzt sich aus den Anteilen trockener Reibung und bei Vorliegen eines Schmierfilms geschwindigkeitsproportionaler viskoser Reibung mit dem Proportionalitätsfaktor  $b$  zusammen. Die trockene Reibung kann in Anlehnung an [4; 5] für  $v > 0$  durch die Gleichung

$$F_{\text{Stribeck}}(v) = F_k + (F_s - F_k) \cdot e^{-\frac{v}{v_{\text{Stribeck}}}} \quad (2)$$

beschrieben werden. Neu hinzukommende Größen sind die kinetische (Coulombsche) Reibkraft  $F_k$  und die Stribeck-Geschwindigkeit  $v_{\text{Stribeck}}$ . Letztere bestimmt den exponentiellen Übergang von Haft- zu Gleitreibung im Mischreibungsbereich. In diesem Bereich nehmen mit zunehmender Geschwindigkeit durch den Aufbau eines Schmierpaltes der Kontakt der Oberflächenrauigkeiten und damit die Reibkraft ab. Der vorliegende Verlauf mit Mischreibung kennzeichnet die so genannte Stribeck-Reibung. Bild 2.2 zeigt die durch Gleichungen (1) und (2) beschriebene Reibkennlinie mit den zugehörigen Parametern.



**Bild 2.2:** Reibkennlinie

Das bisher vorgestellte Reibmodell wird nun um lastabhängige Reibung erweitert. Lastabhängigkeit der Reibkraft liegt vor, wenn sich die Normalkraft  $F_n$  in Bild 2.1 mit der Lastkraft  $F_l$  erhöht. Der einfachste Ansatz, der praktisch für alle Getriebe mit konstanter Übersetzung gilt, ist ein proportionaler Zusammenhang der Normalkraft mit dem Betrag der Lastkraft. Für den lastabhängigen Anteil der kinetischen Reibkraft folgt damit

$$f_{kv} = \mu \cdot F_n = v \cdot |F_l|. \quad (3)$$

Darin ist  $\mu$  der Gleitreibungskoeffizient aus dem Coulombschen Reibgesetz, und  $\nu$  der so genannte Lastabhängigkeitsfaktor der Reibung. Geht man von einem von der Lastkraft unabhängigen Verhältnis

$$\lambda = \frac{F_s}{F_k} \quad (4)$$

von statischer zu kinetischer Reibkraft aus, gilt für den lastabhängigen Anteil der statischen Reibkraft

$$f_{sv} = \lambda \cdot f_{kv} \quad (5)$$

Die Addition der lastunabhängigen und lastabhängigen Anteile liefert die statische und kinetische Gesamtreibung

$$f_s = F_s + f_{sv} \quad (6)$$

$$f_k = F_k + f_{kv} \quad (7)$$

Durch Ersetzen der entsprechenden lastunabhängigen Größen in Gleichungen (1) und (2) erhält man für das Reibmodell mit lastabhängiger Reibung

$$F_{fr} = \begin{cases} F_{ext} & v = 0 \wedge |F_{ext}| \leq f_s \\ f_s \cdot \text{sgn}(F_{ext}) & v = 0 \wedge |F_{ext}| > f_s \\ (f_{\text{Stribeck}}(|v|) + b|v|) \cdot \text{sgn}(v) & v \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

und

$$f_{\text{Stribeck}}(v) = f_k + (f_s - f_k) \cdot e^{-\frac{v}{v_{\text{Stribeck}}}} \quad (9)$$

Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die Stribeck-Geschwindigkeit (das Übergangsverhalten von Haft- zu Gleitreibung) und die Konstante  $b$  für viskose Reibung von der Lastkraft unabhängig sind.

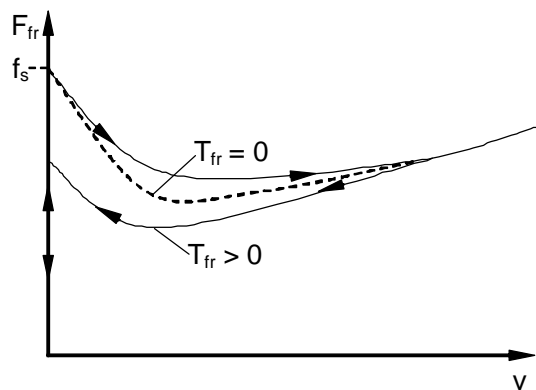
Weitere bei Reibvorgängen zu beobachtende Phänomene sind das in [7] beschriebene verzögerte Reibverhalten (frictional memory) und die damit verbundene von der Verweilzeit (dwell time) im Zustand des Haftens abhängige Losbrechkraft.

Verzögertes Reibverhalten entsteht dadurch, dass sich im Mischreibungsbereich bei Änderungen der Geschwindigkeit  $v$  der Masse aus Bild 2.1 die Verhältnisse im Schmierpalt nur verzögert ändern. Dadurch stellen sich die Werte der trockenen Reibung aus Gleichung (2) bzw. (9) ebenfalls verzögert ein, was durch ein Verzögerungsverhalten erster Ordnung

$$T_{fr} \cdot \dot{f}_{frdelayed} + f_{frdelayed} = f_{Stribeck}(|v|) \quad (10)$$

dargestellt werden kann. Die Zeitkonstante  $T_{fr}$  ist von den Verhältnissen im Schmierpalt abhängig. Typische Werte für  $T_{fr}$  sind in [6] zu finden. Alternativ zu Gleichung (10) wird in [7] ein Totzeitmodell verwendet.

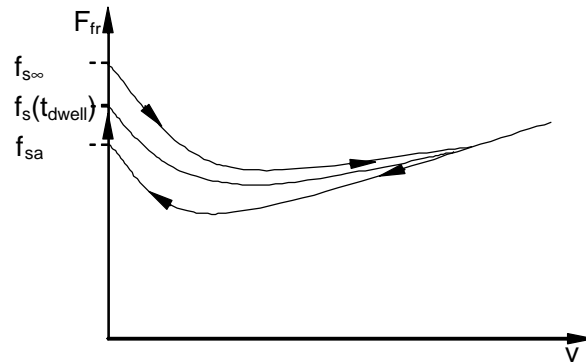
Durch das verzögerte Reibverhalten ist beim Übergang vom Gleiten zum Haften eine geringere statische Reibkraft  $f_s$  zu beobachten als beim vorangehenden Losbrechen aus der Haftreibung. Dieser Effekt macht sich im Verlauf der Reibkennlinie in Form einer Hysterese bemerkbar. Er lässt sich mit Hilfe eines bei zunehmender Geschwindigkeit der betrachteten Masse aufgebauten Schmierfilms erklären, der sich nur verzögert abbaut und damit bei abnehmender Geschwindigkeit zu geringen Reibkräften führt. Bild 2.3 zeigt eine mögliche Reibkennlinie mit verzögertem Reibverhalten für einen Anfahr- und Abbremsvorgang der Masse mit anschließendem Übergang ins Haften.



**Bild 2.3:** Verzögertes Reibverhalten

Das verzögerte Reibverhalten wird im Reibmodell durch Ersatz der trockenen Reibung  $f_{Stribeck}$  in Gleichung (8) durch die verzögerte Reibkraft  $f_{frdelayed}$  wirksam.

Verweilt die Masse aus Bild 2.1 nach einer vorangegangenen Gleitphase im Haften, verhindert bei Vorliegen verzögerten Reibverhaltens der noch vorhandene Schmierfilm zunächst einen vollständigen Kontakt der Oberflächenrauigkeiten. Mit zunehmender Verweilzeit (dwell time) im Zustand des Haftens baut sich dieser Schmierfilm ab und der Kontakt der Oberflächenrauigkeiten nimmt zu. Dies bewirkt die Zunahme der statischen Reibkraft, bis diese bei einer großen Verweilzeit ihren Maximalwert erreicht oder zuvor die Masse wieder losbricht. Bild 2.4 verdeutlicht diesen Effekt für einen zweifachen Anfahrvorgang der betrachteten Masse.



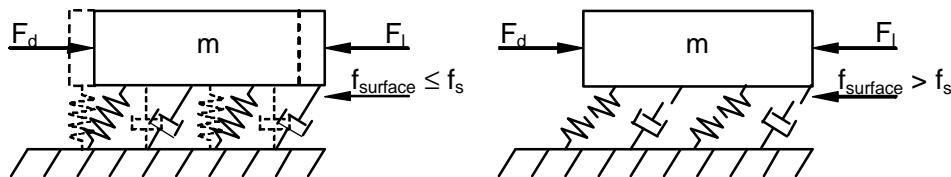
**Bild 2.4:** Verweilzeitabhängige Losbrechkraft

Die von der Verweilzeit  $t_{dwell}$  abhängige statische Reibkraft wird in [7] durch die Gleichung

$$f_s(t_{dwell}) = f_{sa} + (f_{s\infty} - f_{sa}) \cdot \frac{t_{dwell}}{t_{dwell} + T_{dwell}} \quad (11)$$

beschrieben. Darin sind  $f_{sa}$  die Reibkraft am Ende der Gleitphase aus Gleichung (10) und  $f_{s\infty}$  die maximale statische Reibkraft nach einer großen Verweilzeit aus Gleichung (6). Die Zeitkonstante  $T_{dwell}$  ist wieder von den Verhältnissen im Schmier-spalt abhängig. Die Verwendung der von der Verweilzeit abhängigen statischen Reibkraft  $f_s(t_{dwell})$  in Gleichungen (8) und (9) schließt diesen Effekt in das Reibmodell ein.

Bei Lageregel-systemen mit Genauigkeiten im Sub-Mikrometerbereich ist die Elastizität der Rauigkeiten der in Reibkontakt befindlichen Oberflächen zu berücksichtigen. Durch sie kommt es im Zustand des Haftens zu elastischen Bewegungen (presliding displacement). Als Erweiterung zu dem in [7] angegebenen reinen Federmodell erfolgt hier die Modellierung der Elastizität der Oberflächen durch das in Bild 2.5 dargestellte Feder-Dämpfer-Modell.



**Bild 2.5:** Elastische Oberflächen

Im Zustand des Haftens ist die Reibkraft gleich der Feder-Dämpfer-Kraft

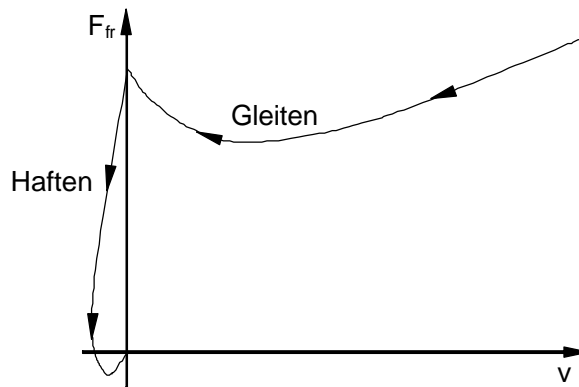
$$f_{surface} = k_{surface} \cdot s + b_{surface} \cdot \dot{s} \quad (12)$$

mit der vom Kontakt der Oberflächen abhängigen Federkonstante

$$k_{surface} = \frac{f_s}{s_{max}}, \quad (13)$$

der Dämpfungskonstante  $b_{\text{surface}}$ , der elastischen Auslenkung  $s$  der Oberflächenrauigkeiten und der maximalen Auslenkung der Oberflächenrauigkeiten  $s_{\text{max}}$  im Zustand des Losbrechens.

Im Unterschied zu den bisher behandelten Modellen erhält man damit für die Haftphase ein dynamisches System. Bild 2.6 zeigt die Reibkennlinie mit elastischen Oberflächen für einen Abbremsvorgang der Masse.



**Bild 2.6:** Reibkennlinie mit elastischen Oberflächen

Im dargestellten Fall sind die Federn, die die elastischen Oberflächen beschreiben, beim Übergang der Masse ins Haften zunächst positiv ausgelenkt. Das Fehlen von externen Kräften bewirkt ein Rückstellen der Federn in die Nulllage und damit eine negative Geschwindigkeit. Wird schließlich der Betrag der viskosen Dämpfungskraft ( $b_{\text{surface}} \dot{s}$ ) größer als der Betrag der Federkraft ( $k_{\text{surface}} s$ ), so wechselt nach Gleichung (12) das Vorzeichen der Beschleunigung und die Masse wird verzögert. Unter der Annahme, dass keine externen Kräfte an der Masse wirken, wird die stationäre Auslenkung der Federn und damit auch die Reibkraft identisch Null.

Elastische Oberflächen werden in das Reibmodell durch die neue Fallunterscheidung

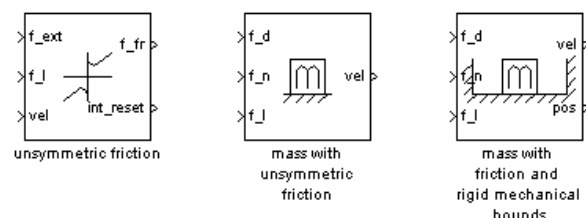
$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} f_{\text{surface}} & \text{Haften} \wedge |f_{\text{surface}}| \leq f_s(t_{\text{dwell}}) \\ f_s(t_{\text{dwell}}) \cdot \text{sgn}(F_{\text{ext}}) & \text{Haften} \wedge |f_{\text{surface}}| > f_s(t_{\text{dwell}}) \\ f_{\text{frdelayed}} \cdot \text{sgn}(v) & \text{Gleiten} \end{cases} \quad (14)$$

anstelle von Gleichung (8) integriert. Dabei kann im Gegensatz zu Gleichung (8) im Zustand des Haftens, wie in Bild 2.6 dargestellt, die Geschwindigkeit  $v$  Werte ungleich Null annehmen. Die Reibungszustände des Haftens und des Gleitens sind spätestens an dieser Stelle über einen finiten Zustandsautomaten mit Hilfe von Zustandsvariablen zu unterscheiden.

### 3 Programmtechnische Implementierung

Das vorgestellte Reibmodell wurde mit den genannten Eigenschaften innerhalb des Simulationswerkzeuges Simulink als maskiertes Subsystem implementiert. Die Programmierung erfolgte ähnlich wie in [2] in Form eines finiten Zustandsautomaten in einer Simulink S-Funktion. Besonderes Augenmerk lag dabei auf einer möglichst genauen Darstellung der Reibungszustände Haften und Gleiten sowie der für die numerische Implementierung erforderlichen Subzustände. Die Übergänge zwischen diesen Zuständen werden durch Ereignisse ausgelöst, die sich als Nulldurchgänge bestimmter Größen des Reibmodells (z.B. der Geschwindigkeit) darstellen. Für die Detektion solcher Ereignisse während der Simulation mit variabler Integrations-schrittweite steht innerhalb einer S-Funktion die Methode „Zero-Crossing“ zur Verfügung. Das zeitlich genaue Ansteuern der Ereignisse und die saubere Initialisierung aller Größen der Modellgleichungen für den neuen Reibungszustand liefern numerisch zuverlässige Ergebnisse. Für die Echtzeitsimulation mit konstanter Integrations-schrittweite steht die Zero-Crossing-Methode nicht zur Verfügung. Hier werden die Nulldurchgänge der entsprechenden Größen nur näherungsweise innerhalb eines Simulationsschrittes erkannt. Die Initialisierung der von einem Zustandsübergang betroffenen Größen erfolgt jedoch unabhängig davon.

Das beschriebene Simulink-Subsystem für die Simulation von Reibung findet sich in weiteren höherwertigen Subsystemen einer vom CLM und von DMecS entwickelten Blockbibliothek wieder. Ein Beispiel für ein solches höherwertiges Subsystem ist die in Bild 3.1 dargestellte Masse mit Reibung. Hier sind zusätzliche Maßnahmen erforderlich, wie das Setzen eines neuen Anfangswertes für die Geschwindigkeit der Masse beim Übergang zum Haften. Ferner verfügen alle Bibliotheksblöcke über eigene Parametermasken für eine leichte Parametrierbarkeit. Bild 3.1 zeigt exemplarisch einige Blöcke aus der entwickelten Blockbibliothek.

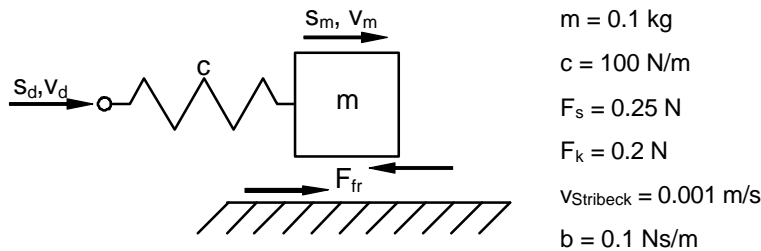


**Bild 3.1:** Blockbibliothek

#### 4 Simulationsergebnisse

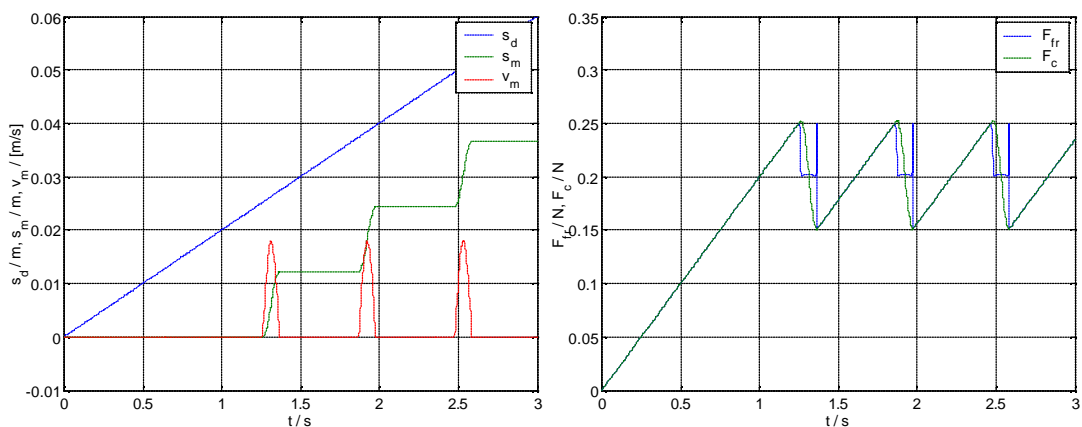
Die folgenden Ergebnisse aus der numerischen Simulation belegen die Funktionalität des entwickelten Reibmodells für zwei grundlegende Experimente.

Der Stick-Slip-Effekt [6; 8] stellt ein typisches Bewegungsverhalten von mechanischen Systemen mit Reibung bei niedrigen Geschwindigkeiten dar. Dieses Verhalten kann mit dem in Bild 4.1 dargestellten einfachen Feder-Masse-Modell nachgebildet werden.



**Bild 4.1:** Modell und Parameter zur Darstellung des Stick-Slip-Effektes

Im zugehörigen Simulationsexperiment wird das freie Federende mit einer konstanten geringen Geschwindigkeit  $v_d$  geführt. Das Reibmodell ist entsprechend den Angaben in Bild 4.1 parametrisiert. Verzögertes Reibverhalten, verweilzeitabhängige Losbrechkraft und Elastizität der Oberflächenrauigkeiten werden zunächst nicht berücksichtigt. Die resultierenden Zeitantworten für die Bewegungsgrößen der Masse sowie für die Reibkraft  $F_{fr}$  und die Federkraft  $F_c$  zeigt Bild 4.2.

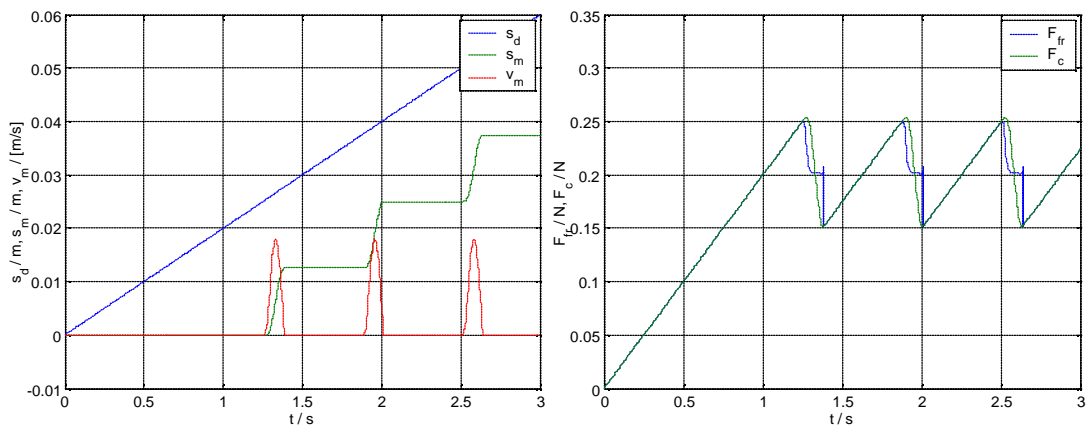


**Bild 4.2:** Zeitantworten für Stick-Slip-Effekt

Während die Masse haftet nimmt die Reibkraft zunächst linear mit der Federkraft zu, bis Losbrechen und der Übergang zum Gleiten eintritt. Dieser Augenblick ist deutlich am Aufbau der Geschwindigkeit  $v_m$  und der Zunahme des Weges  $s_m$  zu erkennen. Die weiteren Verläufe zeigen das typische Stick-Slip-Verhalten mit abwechselnden Haft- und Gleitphasen [6].

Im folgenden wird das Reibmodell sukzessive um verzögertes Reibverhalten, verweilzeitabhängige Losbrechkraft und Elastizität der Oberflächenrauigkeiten erweitert. Das Simulationsexperiment bleibt hingegen unverändert.

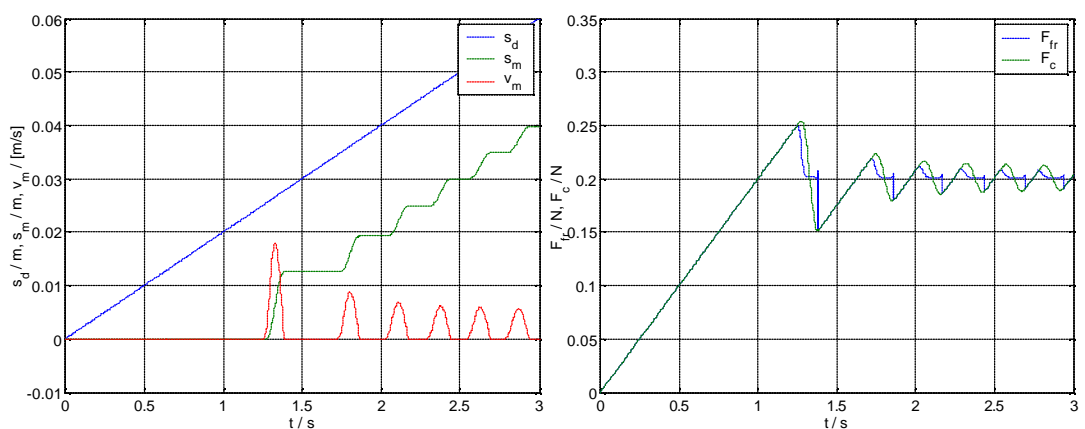
Zunächst wird das verzögerte Reibverhalten hinzugenommen. Die benötigte Zeitkonstante wird  $T_{fr} = 0.01$  sec gewählt. Bild 4.3 zeigt die resultierenden Zeitantworten.



**Bild 4.3:** Zeitantworten für Stick-Slip-Effekt mit verzögertem Reibverhalten

Die Auswirkungen des verzögerten Reibverhaltens sind deutlich zu erkennen. Zunächst fällt die Reibkraft beim Eintritt der Masse in die Gleitphase weniger steil ab und bleibt beim anschließenden Übergang der Masse ins Haften deutlich unterhalb des Wertes der statischen Reibkraft  $f_s$  und die Reibkennlinie erhält die in Bild 2.3 zu sehende Hysterese.

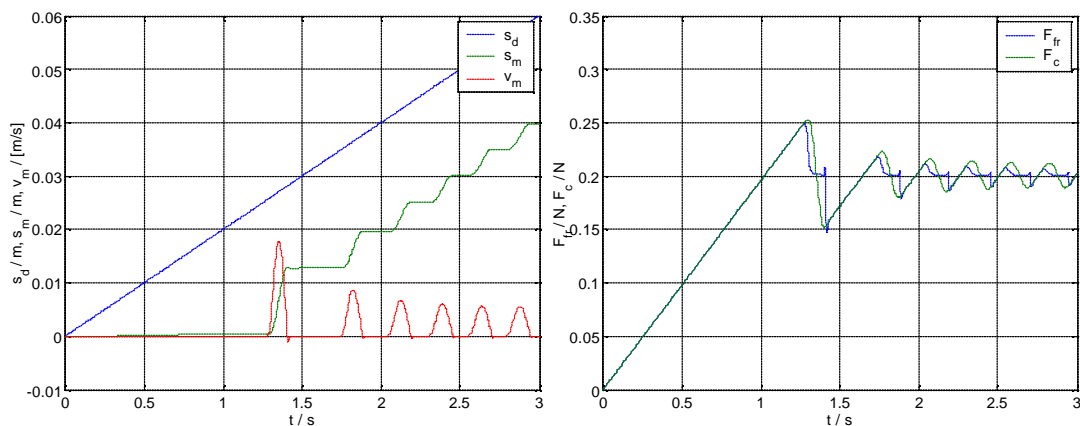
In einem weiteren Experiment wird zusätzlich zum verzögerten Reibverhalten die Verweilzeitabhängigkeit der Losbrechkraft mit der Zeitkonstante  $T_{dwell} = 1$  sec berücksichtigt. Die Ergebnisse sind in Bild 4.4 dargestellt.



**Bild 4.4:** Zeitantworten für Stick-Slip-Effekt mit verzögertem Reibverhalten und verweilzeitabhängiger Losbrechkraft

Die Auswirkung der verweilzeitabhängigen Losbrechkraft ist in den Zeitantworten vor allem an den mit abnehmender Verweilzeit geringer werdenden Losbrechkraften zu erkennen. Dadurch geht die Masse bereits bei geringeren Federkräften in den Zustand des Gleitens über und die Gleitphasen werden entsprechend häufiger.

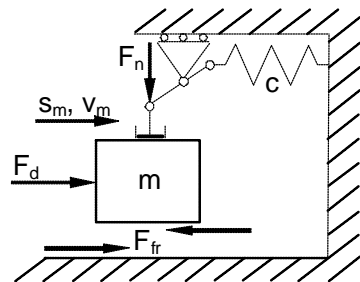
Im letzten Schritt wird schließlich noch die Elastizität der Oberflächenrauigkeiten in die Simulation einbezogen. Dabei wird ein maximale Auslenkung der Oberflächenrauigkeiten  $s_{\max} = 0.05 \text{ mm}$  sowie eine Dämpfungskonstante  $b_{\text{surface}} = 1 \text{ Ns/m}$  gewählt.



**Bild 4.5:** Zeitantworten für Stick-Slip-Effekt mit verzögertem Reibverhalten, verweilzeitabhängiger Losbrechkraft und Elastizität der Oberflächenrauigkeiten

Aufgrund der elastischen Oberflächenrauigkeiten ist im Zustand des Haftens bereits eine geringe Auslenkung  $s_m$  der Masse am Wegverlauf in Bild 4.5 zu beobachten. Ebenfalls treten im Verlauf der Geschwindigkeit  $v_m$  Unterschwinger am Ende der Gleitphasen auf, die wiederum auf die Elastizität der Oberflächenrauigkeiten zurückzuführen sind. Entsprechend ist in den Kraftverläufen beim Übergang in den Zustand des Haftens ein Einschwingen der Oberflächenkraft  $F_{fr} = f_{\text{surface}}$  auf die externe Federkraft  $F_c$  zu erkennen.

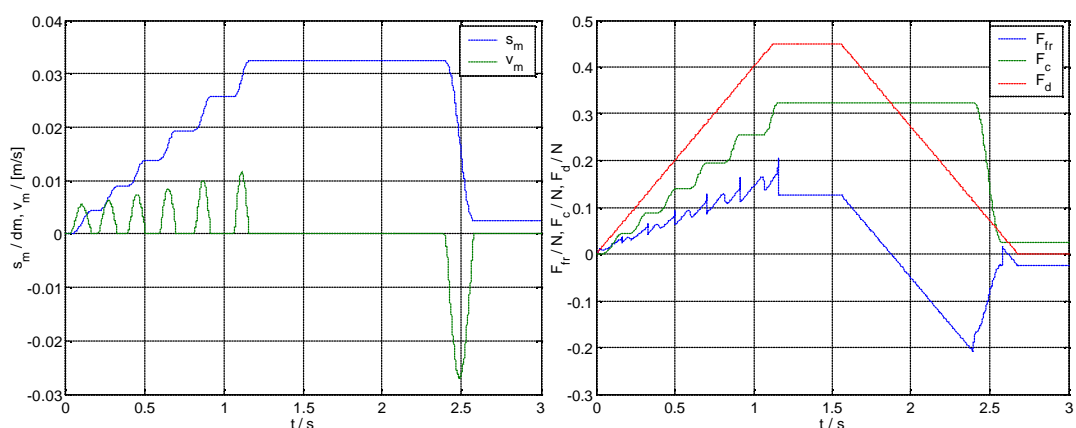
Das zweite Experiment stellt die lastabhängige Reibung dar. Bild 4.6 zeigt das zugehörige Modell.



- $m = 0.1 \text{ kg}$
- $b = 0.1 \text{ Ns/m}$
- $c = 100 \text{ N/m}$
- $v = 0.5$
- $F_s = 0.01 \text{ N}$
- $F_k = 0.008 \text{ N}$
- $v_{\text{Stribeck}} = 0.001 \text{ m/s}$

**Bild 4.6:** Modell und Parameter zur Darstellung der lastabhängigen Reibung

Die Masse wird mit einer vorgegebenen Antriebskraft  $F_d$  gegen die fest gelagerte Feder bewegt, die über den dargestellten Hebelmechanismus zusätzlich eine zur Federkraft  $F_c$  proportionale Normalkraft  $F_n$  auf die Masse ausübt und lastabhängige Reibung hervorruft. Im zugehörigen Simulationsexperiment nimmt die Antriebskraft linear bis zu einem bestimmten Wert zu und wird anschließend nach einer kurzen Haltephase linear auf den Wert Null zurückgenommen. Um die lastabhängige Reibung besonders hervorzuheben, ist das Reibmodell lediglich mit einer geringen lastunabhängigen Grundreibung parametrisiert. Die lastabhängige Reibung wird durch den Lastabhängigkeitsfaktor  $\nu$  berücksichtigt. Bild 4.7 zeigt die resultierenden Zeitantworten.



**Bild 4.7:** Zeitantworten für lastabhängige Reibung

Die Masse setzt sich nach Überwinden der geringen lastunabhängigen Grundreibung in Bewegung und spannt durch ihre Auslenkung  $s_m$  die Feder, die der Bewegung die Federkraft  $F_c$  entgegensetzt. Aufgrund der Lastabhängigkeit steigt ebenfalls die Reibkraft  $F_{fr}$  mit der Auslenkung  $s_m$  an. Die Bewegung zeigt wieder ein Stick-Slip-Verhalten bis sie bei konstanter Antriebskraft in der Haftreibung zum Stillstand kommt. Bei Rücknahme der Antriebskraft  $F_d$  durchläuft die Reibkraft den Bereich der Haftreibung bis zur negativen Losbrechkraft für die erhöhte von der Federkraft abhängige Reibung. Die Reibkraft ändert während dieser Phase ihr Vorzeichen und unterstützt schließlich die Antriebskraft gegen die Federkraft. In dem Augenblick, in dem die Summe aus Antriebskraft und negativer Reibkraft die Federkraft unterschreitet, bricht die Masse in negative Bewegungsrichtung los. Obwohl die Antriebskraft auf den Wert Null zurückgenommen wird, bewegt sich die Masse nicht in ihre Ausgangslage zurück. Sie bleibt bei positiver Auslenkung in der noch erhöhten Haftreibung stecken. Die Haftreibungskraft ist dabei im statischen Gleichgewicht mit der Federkraft. Das dargestellte Verhalten ist z.B. typisch für elektromotorische Bremsaktoren mit Spindelgewindetrieben.

## 5 Zusammenfassung

Das vorgestellte Reibmodell ist durch die Berücksichtigung der unterschiedlichen Reibverhalten in einem weiten Anwendungsfeld für die Simulation von Reibung einsetzbar. Die programmtechnische Implementierung in Form eines finiten Zustandsautomaten, das genaue zeitliche Ansteuern der Ereignisse für die Übergänge zwischen den Reibungszuständen in der Simulation mit variabler Integrationsschrittweite und die saubere Initialisierung aller Größen der Modellgleichungen für einen neuen Reibungszustand liefern ein numerisch zuverlässiges Simulationsmodul. Bei Verwendung von Integrationsverfahren mit fester Schrittweite in Echtzeitanwendungen müssen dagegen gewisse Fehler durch die zeitlich ungenauen Übergänge zwischen den Reibungszuständen in Kauf genommen werden. Simulationsstudien für verschiedene Reibverhalten belegen die Qualität des entwickelten Reibmodells. Das Modell wurde bereits erfolgreich in verschiedene Anwendungen eingesetzt. Beispiele sind elektrische Lenkungen, elektrische Bremsen mit lastabhängiger Reibung, Reifenmodelle, schaltbare Trockenkupplungen sowie hochgenaue und hochdynamische Lageregelssysteme.

## Literatur

- [1] H. Henrichfreise, C. Witte: *Beobachtergestützte nichtlineare Kompensation trockener Reibung in einem Positionierantrieb*. Automatisierungstechnik 46 (1998), Heft 3, S. 128-135.
- [2] S. Klotzbach, H. Henrichfreise, D. Neubauer: *Modellbildung für eine schaltbare Einscheiben-Trockenkupplung zur Simulation von KFZ-Antriebssträngen*. VDI Mechatronik Tagung 2001, Frankenthal, 12. - 13. September 2001.
- [3] M. Klittich: *Über die Nachbildung von Getrieben auf dem Analogrechner*. Elektronische Rechenanlagen 8, H. 3, S. 125-130, 1966.
- [4] H. Henrichfreise: *Zur Modellierung des Antriebes für ein elastisches Handhabungssystem*. DFG-Forschungsbericht LU 299/1-2, IR-Regelung/Hardware, Universität-GH Paderborn, Automatisierungstechnik 1984.
- [5] H. Henrichfreise: *Aktive Schwingungsdämpfung an einem elastischen Knickarmroboter*. Fortschritte der Robotik 1, Vieweg Verlag, Braunschweig 1989.
- [6] B. Friedland, D. A. Haessig, Jr.: *On the modeling and simulation of friction*. Transactions of the ASME, vol. 113, pp. 354-360, 1991.
- [7] B. Armstrong-Hélouvy, P. Dupont, C. Canudas de Wit: *A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction*. Automatica, vol. 30, no. 7, pp. 1081-1138, 1994.
- [8] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Aström, P. Lischinsky: *A new model for control systems with friction*. IEEE Transactions on automatic control, vol. 40, no. 3, pp. 419-425, 1995.